**例4** $\triangle ABC$ 中，$AB+BC=3AC$，内心为 $I$，内切圆分别切 $AB$，$BC$边于点 $D,E$. 设 $D,E$ 关于 $I$ 的对称点分别为 $K,L$. 证明：$A,C,K,L$ 共圆.

**证明**

由已知条件，得 $BD=BE=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)=AC$. 如图 3.13，分别延长 $BI$ 到 $B_1$，$BE$ 到 $C_1$，使得 $BI=IB_1$，$BE=EC_1$，则 $CC_1=EC_1-CE=AC-CE=AD$，$B_1C_1=2IE=KD$，又 $\angle C_1=\angle IEB=90^\circ=\angle IDA$，故 $\triangle CB_1C_1\cong\triangle AKD$，$B_1C=AK$. 又 $\triangle IKB_1\cong\triangle IDB$，$KB_1=BD=AC$，$KC=KC$，故 $\triangle B_1CK\cong\triangle AKC$，$\angle KB_1C=\angle KAC$. 从而 $B_1,A,K,C$ 四点共圆. 同理，$B_1,A,L,C$ 四点共圆. 因此，$A,L,K,C$ 共圆.

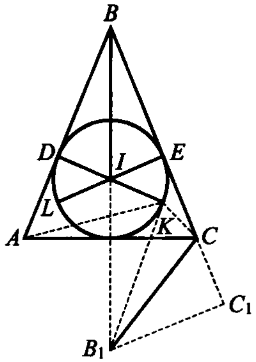


图 3.13

**例5** 已知$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot I$ 与 $AB$，$AC$ 分别切于点 $P,Q$，射线 $BI$，$CI$ 分别交 $PQ$ 于点 $K,L$. 证明：$\triangle ILK$ 的外接圆与$\triangle ABC$ 的内切圆相切的充分必要条件是 $AB+AC=3BC$.

**证明**

如图 3.14 所示，设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，设 $BL$ 和 $CK$ 延长后交于点 $D$. 由于$\triangle PAQ$ 是等腰三角形，所以 $\angle BKL=\angle APK-\angle ABK=\frac{1}{2}\angle ACB$. 所以 $I,K,Q,C$ 四点共圆，$B,L,K,C$ 四点共圆. 由 $\angle IKC=\angle IQC=90^\circ$，$I,L,D,K$ 四点共圆，$ID$ 是$\triangle ILK$ 的外接圆直径.

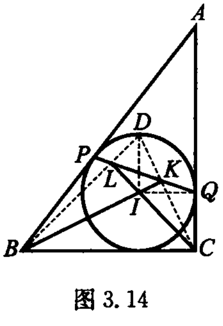


图 3.14

易知 $\angle BDC=90^\circ-\dfrac{\angle BAC}{2}$，故 $ID=a\cot\angle BDC=a\tan\dfrac{\angle BAC}{2}$. 另一方面，$r=AQ\tan\dfrac{\angle BAC}{2}$，$AQ=\dfrac{1}{2}(b+c-a)$，其中 $r$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆半径. 于是$\triangle ILK$ 的外接圆与$\triangle ABC$ 的内切圆相切，当且仅当$\triangle ILK$ 外接圆的直径等于$\triangle ABC$ 内切圆的半径，$r=ID\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(c+b-a)=a\Leftrightarrow b+c=3a$.

**例 6** 已知$\triangle ABC$，$\angle B=90^\circ$，内切圆分别切 $BC$，$CA$，$AB$ 于点 $D$，$E$，$F$. 又 $AD$ 交内切圆于另一点 $P$，$PF\perp PC$，求$\triangle ABC$ 三边长之比.

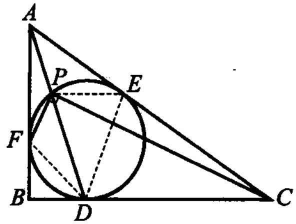

图 3.15

**解** 如图 3.15，连 $FD$，$PE$，$ED$，易知$\triangle FBD$ 是等腰直角三角形. 由弦切角知，$\angle FPD=\angle FDB=45^\circ$，于是 $\angle DPC=45^\circ$. 又 $\angle PDC=\angle PFD$，故$\triangle PFD\backsim\triangle PDC$，所以$\dfrac{PF}{FD}=\dfrac{PD}{CD}$. 又由于$\triangle APF\backsim\triangle AFD$，$\triangle APE\backsim\triangle AED$，故$\dfrac{PE}{DE}=\dfrac{AP}{AE}=\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{PF}{FD}$，于是$\dfrac{PE}{DE}=\dfrac{PD}{CD}$. 又 $\angle EPD=\angle EDC$，故$\triangle EPD\backsim\triangle EDC$，于是$\triangle EPD$ 也是等腰三角形，所以 $\angle PED=\angle EPD=\angle EDC$，所以 $PE\parallel BC$，于是$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{PE}{CD}=\dfrac{PE}{ED}\cdot\dfrac{ED}{CD}=\left(\dfrac{ED}{CD}\right)^2=4\sin^2\dfrac{C}{2}=2(1-\cos C)=2\left(1-\dfrac{BC}{AC}\right)=2\,\dfrac{AC-BC}{AC}$.

又 $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{\frac{1}{2}(AB+AC-BC)}{AC}$，故 $AB+AC-BC=4(AC-BC)$，$AB=3(AC-BC)$. 两边平方，得 $AB^2=9(AC-BC)^2=$

$AC^2-BC^2$,此即 $9(AC-BC)=AC+BC$,所以$\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5}$,所以 $AB:BC:AC=3:4:5$.

**例 7** $\triangle ABC$ 的内切圆切 $BC$ 于 $D$,$AD$ 在圆内部分上任找一点 $E$,设线段 $BE$,$CE$ 分别与圆交于点 $F$,$G$. 求证:$AD$,$BG$,$CF$ 共点.

**证明** 设$\triangle ABC$ 三对应边为 $a$,$b$,$c$,$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,如图 3.16,连$DG$,$DQ$,$QG$,其中 $Q$ 为内切圆与 $AC$ 的切点. 设 $CE$与 $DQ$ 交于点 $P$.

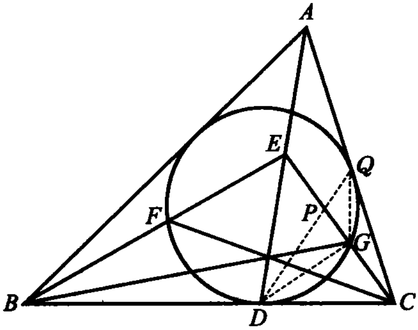

图 3.16

不妨设 $\frac{ED}{AE}=k$. 由门奈劳斯定理,$\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{QP}{PD}\cdot\frac{DE}{EA}=1$,此即$\frac{PD}{PQ}=\frac{bk}{p-c}$. 所以$\frac{PD}{QD}=\frac{bk}{p-c+bk}$,$\frac{PQ}{QD}=\frac{p-c}{p-c+bk}$.

又由弦切角及面积比,知 $\frac{PG^2}{GC^2}=\frac{PD\sin\angle QDG}{CD\sin\angle CDG}\cdot\frac{PQ\sin\angle DQG}{CQ\sin\angle CQG}=\frac{PD\cdot PQ}{CD^2}=\frac{QD^2\cdot bk(p-c)}{CD^2\cdot(p-c+bk)^2}$,所以$\frac{PG}{CG}=\frac{QD}{CD}\cdot\frac{\sqrt{bk(p-c)}}{p-c+bk}$.

又由门奈劳斯定理,有 $\frac{AD}{DE}\cdot\frac{EP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$,此即$\frac{1+k}{k}\cdot\frac{EP}{PC}\cdot\frac{p-c}{p-a}=1$,不妨设 $PG=1$,则由上述得 $CG=\frac{CD}{QD}\cdot\frac{p-c+bk}{\sqrt{bk(p-c)}}$. 而 $EP=\frac{k(p-a)}{(1+k)(p-c)}\cdot PC=\frac{k(p-a)}{(1+k)(p-c)}(1+CG)$.

于是

$$\frac{EG}{CG}=\frac{EP+1}{CG}=\frac{k(p-a)+(1+k)(p-c)+k(p-a)\cdot CG}{(1+k)(p-c)\cdot CG}$$

$$=\frac{bk+k(p-a)\cdot CG+p-c}{(1+k)(p-c)\cdot CG}$$

$$=\frac{\frac{QD}{CD}\sqrt{bk(p-c)}+k(p-a)}{(1+k)(p-c)}.$$

易知 $\frac{QD}{CD}=2\sin\frac{\angle ACB}{2}$，于是

$$\frac{QD}{CD}\sqrt{bk(p-c)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\angle ACB}{2}\cdot bk(p-c)}$$

$$=\sqrt{2(1-\cos\angle ACB)\cdot bk(p-c)}$$

$$=\sqrt{2\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)bk(p-c)}$$

$$=2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)k}{a}},$$

因此$\frac{QD}{CD}\sqrt{bk(p-c)}+k(p-a)$是一个关于 $b,c$ 对称的式子，设其为 $d$，则 $\frac{EG}{CG}=\frac{d}{(1+k)(p-c)}$. 同理$\frac{EF}{BF}=\frac{d}{(1+k)(p-b)}$，于是$\frac{EF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CG}{GE}=\frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{BD}{CD}=1$，故由塞瓦逆定理，知 $AD,BG,CF$ 共点.